

UNA LEZIONE SUI NUMERI PRIMI: NASCE LA RITABELLA

Tutti gli anni, affrontando l'argomento della divisibilità, trovavo utile far lavorare gli alunni sul Crivello di Eratostene.

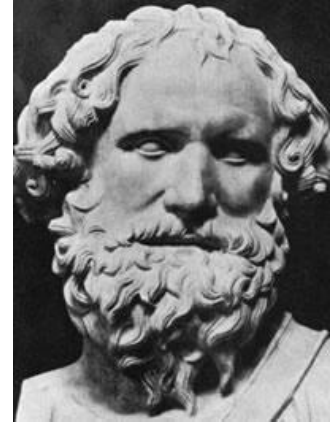
Presentavo ai ragazzi una tabella con i numeri naturali da 1 a 100 per andare alla scoperta dei numeri primi.

L'anno in cui ho avuto in classe alcuni alunni con gravi difficoltà nel calcolo ho pensato di rendere il lavoro più pratico, coinvolgente e piacevole utilizzando i colori.

Ecco il racconto dell'esperienza.

Nella lezione precedente avevo spiegato che **un numero naturale maggiore o uguale a 2 è primo, se ammette solo due divisori: 1 e se stesso**, altrimenti è composto.

I ragazzi avevano capito che, per essere composto, un numero deve essere multiplo di un altro cioè appartenere a qualche "tabellina".



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ci proponiamo di cancellare sulla tabella tutti i numeri composti affinché rimangano solo i numeri primi.

Per procedere in modo ordinato decidiamo di cancellare, in ordine, tutti i multipli di 2, poi di 3 e così via. I ragazzi capiscono che non ha senso considerare i multipli di 1 perché vorrebbe dire cancellare tutti i numeri.

Affermo che effettivamente l'**1 non viene considerato numero primo** dai matematici e quindi lo cancelliamo.



Il **2 è un numero primo** e lo evidenziamo in rosso.

Chiedo ai ragazzi se sanno trovare facilmente i multipli di 2 e subito si accorgono che sono

disposti su colonne alterne.

Lasciandoli liberi di fare osservazioni, scoprono che le colonne da cancellare sono quelle che hanno come prima casella un numero pari e che in generale i numeri di ogni colonna hanno tutti la stessa cifra delle unità.

Qualcuno si ricorda che il criterio di divisibilità del 2 è proprio questo: la cifra delle unità deve essere pari.

Tracciamo quindi delle linee rosse su queste colonne.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3

Il **3** è un numero primo e lo evidenziamo in verde.

Chiedo se anche i multipli di 3 sono disposti in modo regolare.

Dopo aver trovato i primi multipli, si accorgono che sembrano essere disposti lungo linee diagonali.

Qualcuno suggerisce di provare con il criterio di divisibilità del 3, si fa qualche controllo e l'ipotesi viene confermata.

Tracciamo delle linee diagonali verdi.

×	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

I ragazzi manifestano un certo stupore nel constatare questa regolarità e la curiosità di trovarne altre per i prossimi numeri.

4

Vedono subito che il 4 e i suoi multipli sono già tutti cancellati in quanto multipli di 2.

Il 4 non è un numero primo, è un numero composto.

Ne approfitto per introdurre un po' di logica: se un numero è multiplo di 4 è anche multiplo di 2?

E viceversa, se un numero è multiplo di 2 è anche multiplo di 4?

5

Il **5** è un numero primo, infatti non è stato segnato né in rosso né in verde: è multiplo solo di 1 e di se stesso. Sarà giallo.

Gli alunni trovano subito che tutti i suoi multipli si trovano su due colonne, quella del 5 e quella del 10.

Facile il collegamento al criterio di divisibilità del 5!

×	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



Il **6 è un numero composto**, infatti è stato segnato in rosso e in verde, è divisibile per 2 e per 3.

Un alunno osserva che altri numeri sono attraversati da più colori come il 6: il 10 e il 15.

Ascolto tutte le loro osservazioni spontanee su questa scoperta:

- tutti i numeri della colonna del 10 sono divisibili per 2, per 5 ma anche per 10
- se oltre al rosso e al giallo ci passa anche il verde, sono divisibili per 3 e quindi anche per 6 e per 15
- e anche per 30, infatti $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Arriviamo alla conclusione che **se un numero è segnato con più colori, è multiplo anche dei prodotti ottenuti moltiplicando i valori dei colori.**

Propongo qualche esercizio per applicare questa nuova scoperta:

- a) 84 è divisibile per 6?
- b) 45 è divisibile per 15?
- c) 80 è divisibile per 6? Perché no?
- d) Trova un numero divisibile per 30
- e) Dove si trovano i numeri divisibili contemporaneamente per 2 e per 5?
- f) ...



Il **7 è un numero primo**, infatti non è stato segnato in nessuno dei precedenti colori.

Questo criterio varrà per riconoscere i prossimi numeri primi. Scegliamo il nero.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

I ragazzi si accorgono che, anche se i multipli di 7 hanno una distribuzione regolare, non è possibile tracciare delle linee che li congiungano e si passa quindi a dei pallini neri.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Davide, che non si ricorda tutta la tabellina del 7, trova che per passare da un multiplo al successivo, basta contare 7 caselle in avanti o, meglio, scendere di una e tornare indietro di 3.

Soprattutto i ragazzi che hanno difficoltà nella memorizzazione delle tabelline e sono costretti a sommare, cercano e più facilmente trovano delle strategie alternative.

Io valorizzo questa intuizione e mi ripropongo di approfondirla in seguito con tutta la classe.



L'8, il 9 e il 10 sono numeri composti.

Procediamo velocemente.



L'11 è un numero primo: blu.

E' immediato constatare che i suoi multipli si trovano su una linea obliqua che coloriamo in blu.

Osserviamo che i multipli di 11 hanno la cifra delle decine uguale a quella delle unità: infatti sommare 11 ad un numero equivale ad aumentare il numero di 1 decina e 1 unità.

Quindi sulla tabella ci si sposta di una casella in basso e di una casella a destra.

Prima di passare al numero successivo, i ragazzi fanno notare che non abbiamo dovuto cancellare alcun nuovo numero: i multipli di 11 erano già multipli di altri numeri.

×	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



Il 12 è un numero composto



Il 13 è un numero primo: fucsia.

Nessuno conosce la tabellina del 13 e quindi troviamo i suoi multipli sommando

ripetutamente 13. I ragazzi si accorgono che per

sommare 13 sulla tabella basta spostarsi in basso di una casella e a destra di 3.

Faccio notare che, senza rendersene conto, hanno applicato la proprietà dissociativa dell'addizione:

$$13 + 13 = 13 + 10 + 3$$

×	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ne approfitto per generalizzare questo esempio facendo notare che per addizionare un numero di due cifre basta scendere di tante righe quante sono le decine e contare verso destra tante caselle quante sono le unità.

Propongo qualche esercizio di addizioni utilizzando la tabella. Questo aiuta gli alunni che hanno difficoltà nel calcolo a identificare in ogni numero la cifra delle decine e quella delle unità.

Esempio: **23 + 53 = 76**

Partendo dal 23 sommo 5 decine (5 ↓) e 3 unità (3 →)

Anche per il 13 non abbiamo dovuto cancellare alcun nuovo numero: i multipli di 13 erano già multipli di altri numeri.



Il prossimo **numero primo** è **17**: azzurro.

Questa volta i ragazzi scoprono una nuova strategia:

invece di sommare 10 (1 ↓) e 7 (7 →),
possiamo sommare 20 (2 ↓) e togliere 3 (3 ←).

Anche i multipli di 17 erano già stati cancellati e ci chiediamo se ormai sono rimasti solo numeri primi.

Ragionando sul 17, si accorgono che hanno trovato, oltre al 17, solo 4 multipli:

$$17 \times 2 = 34$$

$$17 \times 3 = 51$$

$$17 \times 4 = 68$$

$$17 \times 5 = 85$$

già cancellati come multipli di 2, 3, 4 e 5.

A maggior ragione i multipli dei prossimi numeri primi sono già stati cancellati.

Avevamo notato che anche i multipli del 13 e dell'11 erano stati cancellati precedentemente.

Infatti:

$$13 \times 2 = 26 \quad 13 \times 3 = \dots \quad 13 \times 7 = 91$$

$$11 \times 2 = 22 \quad 11 \times 3 = \dots \quad 11 \times 9 = 99$$

Ripensando anche alle tabelline precedenti abbiamo notato che, per ogni numero primo, erano già stati sicuramente cancellati tutti i multipli ottenuti con i numeri che lo precedono.

Esempio: per il 5 sicuramente erano cancellati 5×1 , 5×2 , 5×3 , 5×4 .

Il primo a non essere cancellato è quindi 5×5

Analogamente per il 7, il primo da cancellare è 7×7 .

Quindi **per ogni numero primo considerato i numeri che dovranno essere cancellati saranno il suo quadrato e i multipli successivi.**

Il primo numero da cancellare per l'11 sarebbe $11 \times 11 = 121$ ma è troppo grande per la nostra tabella.

Si deduce che sarebbe stato sufficiente cancellare i multipli di 7, numero primo che precede 11.

Evidenziamo i numeri rimasti, tutti primi.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

CONCLUSIONE

Alcuni ragazzi sono molto soddisfatti del loro lavoro, altri invece, davanti alla loro tabella disordinata e piena di cancellazioni, mi chiedono di avere una nuova tabella vuota per rifarla meglio.

Acconsento e decido di dedicare dell'altro tempo a questo lavoro perché intuisco che la tabella potrà essere utilizzata per individuare i divisori di ciascun numero, soprattutto dai ragazzi con difficoltà nel calcolo.

Evidentemente da questa tabella non si deducono però tutti i divisori di un numero.

Ad esempio si vede che l'8 è divisibile per 2, ma non appare che sia divisibile anche per 4.

Allora un'idea prende forma: nella casella di ogni numero disegneremo tutti i pallini colorati che corrispondono ai fattori primi della sua scomposizione.



Il 24 avrà 3 pallini rossi e uno verde perché $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

I suoi divisori saranno il 2, il 3, ma anche tutti i prodotti ottenuti dalle combinazioni dei quattro fattori.

Propongo allora a tutta la classe di elaborare un'altra tabella con i pallini colorati lavorando in piccoli gruppi.

NASCE LA **RITABELLA**